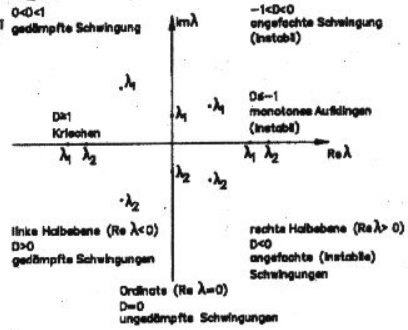
Abklingkoeff. $= \omega^a$ Eigenwert geel. Sys.

Re Im

$R_{1/2} = -\delta \pm i\sqrt{\omega^2 - \delta^2}$



3.3 Schwinger mit Dämpfung

- Schwinger mit einem Freiheitsgrad
  Bewegungsgleichung:

$$m\ddot{q} + d\dot{q} + kq = 0 \qquad bzw. \qquad \ddot{q} + 2\delta\dot{q} + \omega^2 q = 0$$

Char. Gleich. $R^2 + 2\delta R + \omega^2 = 0$

mit

d = Dämpfungskonstante $\left[\frac{Ns}{m}\right]$, Systemgröße

δ = Abklingkoeffizient $\left[\frac{1}{s}\right] = \frac{1}{2}\frac{d}{m} = \omega \cdot D$ $\qquad \omega^d = \sqrt{1-D^2}\,\omega = \sqrt{\omega^2 - \delta^2}$

$D = \delta/\omega$ = Dämpfungsgrad [−]

Ansatz: $q = Ce^{\lambda t} \rightarrow$ Eigenwerte λ: $\lambda = -\delta \neq \sqrt{\delta^2 - \omega^2}$

Je nach Dämpfungsgrad unterscheidet sich die Lösung der Bewegungsgleichung:

Dämpfungsgrad (Eigenwerte)	Nr.	Lösung	mit
$\left\lvert\frac{\delta}{\omega}\right\rvert = \lvert D\rvert < 1$ $\lambda_{1,2} = -\delta \pm i\sqrt{\omega^2 - \delta^2}$ $= -\delta \pm i\omega^d$	1	$0 < D < 1$: $q = e^{-\delta t}\left[A\cos\omega^d t + B\sin\omega^d t\right]$	$A = q(0) \quad B = \frac{\dot{q}(0)+\delta q(0)}{\omega^d}$
	2	$-1 < D < 0$: $q = e^{\alpha t}\left[A\cos\omega^d t + B\sin\omega^d t\right]$	A,B s. Nr.1 (mit $\delta = -\alpha$)
$\left\lvert\frac{\delta}{\omega}\right\rvert = \lvert D\rvert > 1$ $\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega^2}$ $= -\delta \pm \delta^k$	3	$D > 1$: $q = e^{-\delta t}\left[A\cosh\delta^k t + B\sinh\delta^k t\right]$	A = q (0) $\quad B = \frac{\dot{q}(0)+\delta q(0)}{\delta^k}$
	4	$D < -1$: $q = e^{\alpha t}\left[A\cosh\delta^k t + B\sinh\delta^k t\right]$	A,B s. Nr.3 (mit $\delta = -\alpha$)
$\left\lvert\frac{\delta}{\omega}\right\rvert = \lvert D\rvert = 1$ $\lambda_{1,2} = -\delta$	5	$D = 1$: $q = e^{-\delta t}\left[A + Bt\right]$ mit $\delta = \omega$	$A = q(0) \quad B = \dot{q}(0) + \delta q(0)$
	6	$D = -1$: $q = e^{\alpha t}\left[A + Bt\right]$	A,B s. Nr.5 (mit $\delta = -\alpha = -\omega$)
d =0 (keine Dämpfung) $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$	7	s. Kapitel 3.2	

Für Nr. 1 gilt: Λ = logarithmisches Dekrement [−]

$$\Lambda^{def} = \frac{1}{n}\ell n\frac{q(t)}{q(t+nT^d)} = \delta T^d = \frac{2\pi D}{\sqrt{1-D^2}} \Rightarrow D = \frac{\Lambda}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\Lambda}{2\pi}\right)^2}}$$

Lage der Eigenwerte in der komplexen Zahlenebene:

$$\lambda = \mathrm{Re}(\lambda) + i \cdot \mathrm{Im}(\lambda)$$

„negative" Dämpfung D → angefachte Schwingung

3.2 Freie Schwingungen ungedämpfter Schwinger infolge Anfangsbedingungen

Technisch gibt es folgende Ursachen für Anfangsbedingungen:

1. Ein System wird zu Schwingungen durch äußere Kräfte $f(t)$ angeregt, die für $t > t_0$ verschwinden. Die Anfangsbedingungen ergeben sich unmittelbar aus dem Schwingungszustand für $t = t_0$.
2. Ein System wird durch langsam, also statisch aufgebrachte Kräfte in einen Anfangsauslenkungszustand gebracht. Zum Zeitpunkt $t = t_0$ werden die Kräfte schnell (plötzlich) entfernt. Die Anfangsbedingungen ergeben sich dann aus der statischen Beziehung $\underline{K} \cdot \underline{q} = \underline{f}$.
3. Ein System wird durch kurzzeitig (impulsförmig, stoßartig) wirkende Kräfte in einen Anfangsgeschwindigkeitszustand gebracht. Die Anfangsbedingungen ergeben sich dann aus Impuls- bzw. Drehimpulssatz für die einzelnen Massen:
   $\underline{M} \cdot \dot{\underline{q}} = \underline{p}$ Vektor der Impulse und der Drehimpulse
   mit $p_i = \int_0^{t_*=t_0} f_i(t)\,dt$

Lösung für freie Schwingungen unter Anfangsbedingungen:

Schwinger mit einem Freiheitsgrad: $m\ddot{q} + kq = 0$	Schwinger mit mehreren Freiheitsgraden: $\underline{M}\ddot{\underline{q}} + \underline{K}\underline{q} = \underline{0}$	Sonderfall: Ungefesselter Schwinger: $\underline{M}\ddot{\underline{q}} + \underline{K}\underline{q} = \underline{0}$
		$\omega_k = 0 \Rightarrow \underline{\varphi}_k^{st}$, $k = 1...m$ $\omega_k \neq 0 \Rightarrow \underline{\varphi}_k^{dy}$, $k = m+1...n$
$q = A\cos\omega t + B\sin\omega t$ bzw. $q = C\cos(\omega t - \alpha)$	$\underline{q} = \sum_{k=1}^{n} \underline{\varphi}_k (A_k\cos\omega_k t + B_k\sin\omega_k t)$ bzw. $\underline{q} = \sum_{k=1}^{n} \underline{\varphi}_k C_k\cos(\omega_k t - \alpha_k)$	$\underline{q} = \underline{q}^{st} + \underline{q}^{dy}$ $\Rightarrow$ $\underline{q} = \sum_{k=1}^{m} \underline{\varphi}_k^{st}\left(A_k^{st} + B_k^{st}t\right) +$ $\sum_{k=m+1}^{n} \underline{\varphi}_k^{dy}\left(A_k^{dy}\cos\omega_k t + B_k^{dy}\sin\omega_k t\right)$
mit	mit	mit
$A = q(0)$ $B = \frac{\dot{q}(0)}{\omega}$ $C = \sqrt{A^2 + B^2}$ $\tan\alpha = \frac{B}{A}$ $\sin\alpha = \frac{B}{C}$ $\cos\alpha = \frac{A}{C}$	$A_k = \frac{1}{k_k^g}\underline{\varphi}_k^T\underline{K}\underline{q}(0)$ ① bzw. $A_k = \frac{1}{m_k^g}\underline{\varphi}_k^T\underline{M}\underline{q}(0)$ ② $B_k = \frac{1}{m_k^g\omega_k}\underline{\varphi}_k^T\underline{M}\dot{\underline{q}}(0)$ $C_k = \sqrt{A_k^2 + B_k^2}$ $\tan\alpha_k = \frac{B_k}{A_k}$ $\sin\alpha_k = \frac{B_k}{C_k}$ $\cos\alpha_k = \frac{A_k}{C_k}$	$A_k^{st} = \frac{1}{m_k^g}\underline{\varphi}_k^{stT}\underline{M}\underline{q}(0)$ $B_k^{st} = \frac{1}{m_k^g}\underline{\varphi}_k^{stT}\underline{M}\dot{\underline{q}}(0)$ $A_k^{dy} = \frac{1}{m_k^g}\underline{\varphi}_k^{dyT}\underline{M}\underline{q}(0)$ $B_k^{dy} = \frac{1}{m_k^g\omega_k}\underline{\varphi}_k^{dyT}\underline{M}\dot{\underline{q}}(0)$

① : Geeignet, wenn $\underline{q}(0)$ aus Anfangsbelastungszustand $\underline{K} \cdot \underline{q}(0) = \underline{f}(0)$ folgt.
② : Muss verwendet werden, wenn $\underline{K}$ singulär ist.

Berechnung der generalisierten Größen:

$$\underline{\phi}^T\underline{M}\underline{\phi} = \underline{M}^g = \begin{bmatrix} m_1^g & & 0 \\ & m_2^g & \\ 0 & & m_n^g \end{bmatrix} \qquad \underline{\phi}^T\underline{K}\underline{\phi} = \underline{K}^g = \begin{bmatrix} k_1^g & & 0 \\ & k_2^g & \\ 0 & & k_n^g \end{bmatrix}$$

i-te Eigenfrequenz des ungedämpften Systems $\omega_i = \sqrt{\frac{k_i^g}{m_i^g}}$

$m_i^g = \varphi_i^T \underline{M} \varphi_i \qquad k_i^g = \varphi_i^T \underline{K} \varphi_i$

- Schwinger mit mehreren Freiheitsgraden (Proportionaldämpfung)

Bei Proportionaldämpfung sind die Eigenvektoren des ungedämpften Schwingers $\underline{\varphi}_k$ gleich denen des gedämpften Schwingers $\underline{\varphi}_k^d$:

$$\underline{D} = \underline{D}^P \rightarrow \underline{\varphi}_k^d \stackrel{!}{=} \underline{\varphi}_k$$

Lösung der Bewegungsgleichung

$$\underline{M}\ddot{\underline{q}} + \underline{D}^P\dot{\underline{q}} + \underline{K}\underline{q} = \underline{0} \qquad für \quad 0 < D_i < 1:$$

$$\begin{aligned} \underline{q}(t) &= \sum_{i=1}^{n} \underline{q}^{(i)}(t) \quad (\hat{=} \text{ Summe der Eigenschwingungen } \underline{q}^{(i)}(t)) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \underline{\varphi}_i e^{\delta_i t} C_i \cos\left(\omega_i^d t - \alpha_i\right) \end{aligned}$$

mit:

- Eigenvektoren $\underline{\varphi}_i$ aus Eigenwertproblem $\left(\underline{K} - \omega_i^2\underline{M}\right)\underline{\varphi}_i = \underline{0}$
- modaler Abklingkoeffizient

$$\delta_i = \frac{1}{2}\frac{d_i^g}{m_i^g} = \omega_i D_i = \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta\omega_i^2$$

mit

* d_i^g: generalisierte (modale Dämpfungskosnstante) der i-ten Eigenform

$$\underline{\varphi}_k^T\underline{D}^P\underline{\varphi}_\ell = \begin{cases} 0 \text{ für } k \neq \ell \\ d_k^g \text{ für } k = \ell \end{cases} \qquad bzw. \quad \underline{\phi}^T\underline{D}^P\underline{\phi} = \underline{D}^g = \begin{bmatrix} d_1^g & 0 & 0 \\ 0 & d_2^g & 0 \\ 0 & 0 & d_3^g \end{bmatrix}$$

* m_i^g, ω_i s. 3.2
* modaler Dämpfungsgrad
  $D_i = \frac{\delta_i}{\omega_i} = \frac{1}{2}\frac{d_i^g}{m_i^g\omega_i} = \frac{1}{2}\frac{d_i^g\omega_i}{k_i^g} = \frac{1}{2}\frac{\alpha}{\omega_i} + \frac{1}{2}\beta\omega_i$
* $\alpha\left[s^{-1}\right], \beta[s]$ freie Konstanten aus $\underline{D}^P = \alpha\underline{M} + \beta\underline{K}$ Raylegh-DÄ

komplexe Erweiterung der Erregerfkt:

$f(t) = A\cos\Omega t + B\sin\Omega t$ [reell]

$\underline{\bar{F}} = \bar{F}_i e^{i\Omega t}$ $\qquad$ mit $\bar{F}_i = F e^{-i\psi}$

$F = \sqrt{A^2 + B^2}$

$\tan\psi = \frac{B}{A}$

$$\left[\left(\underline{K} - \underline{M}\Omega^2\right) + i\underline{D}\Omega\right]\underline{\bar{Q}} = \underline{\bar{F}}$$

$$\underline{M}\ddot{\underline{q}} + \underline{D}\dot{\underline{q}} + \underline{K}\underline{q} = \underline{f}(t) - \underline{K}^0\underline{q}^0 - \underline{D}^0\dot{\underline{q}}^0 - \underline{M}^0\ddot{\underline{q}}^0$$

Unwucht $U = me$; Fliehkraft $F_F = me\Omega^2$

Im folgenden wird nur die partikulare Lösung betrachtet, da für $D > 0$ der homogene Lösungsanteil abklingt. Nach Beendigung des Einschwingvorgangs ist der Schwinger im "stationären" Zustand. Unter dieser Voraussetzung ergeben sich folgende Formeln und Rechenwege zur Lösung der Bewegungsgleichungen von Ein- und Mehrfreiheitsgradschwingern bei harmonischer Erregung: $\left(\eta = \frac{\Omega}{\omega}\right)$.

Ein Freiheitsgrad (hom Erreg) $\alpha = -\epsilon$ (Unwucht Erreg.)

	reell	komplex
Erregung (harmonische Funktion)	$f(t) = F\cos(\Omega t - \psi)$ (6)	$\overline{f}(t) = \overline{F}e^{i\Omega t}$ (7) mit $\overline{F} = Fe^{-i\psi}$ (8)
Antwort	$q(t) = Q\cos(\Omega t - \gamma)$ (5) $Q = h(\Omega)\cdot F$ (1) $\gamma = \psi - \alpha(\Omega)$ (2)	$\overline{q}(t) = \overline{Q}e^{i\Omega t}$ (9) mit $\overline{Q} = Qe^{-i\gamma}$ (11) $\overline{Q} = \overline{h}(\Omega)\cdot\overline{F}$ (12)
Amplituden- u. Phasengang der Übertragungsfkt $\overline{h}$ bzw. $\overline{H}$	$h(\Omega) = \frac{1}{k\sqrt{(1-\eta^2)^2+(2D\eta)^2}}$ (3) $\tan\alpha(\Omega) = \frac{-2D\eta}{1-\eta^2}$ (4)	$\overline{h}(\Omega) = \frac{1}{k}\cdot\frac{1}{(1-\eta^2)+i2D\eta}$ (13) $= h(\Omega)\,e^{i\alpha(\Omega)}$
Rechenablauf	$q(t) = Q\cos(\Omega t - \gamma)$ mit Q aus (1) mit (3), (6) * γ aus (2) mit (4), (6)	a) $\mathrm{Re}\{\overline{q}(t)\} = q(t)$ mit $\overline{q}(t)$ aus (9) mit (12) mit (13) b) $q(t) = Q\cos(\Omega t - \gamma)$ mit Q, γ aus (11), wenn $\overline{Q}$ aus (12) mit (13) bekannt *
	*Berechnen von Q alleine auch über Vergrößerungsfkt. möglich	

$\eta = 1$: $Q = q_{st}\cdot\frac{1}{2D}$

- Zur Beschreibung der stationären Antwort infolge harmonischer Erregung dienen die Übertragungsfunktion (Frequenzgang) $h(\Omega)$ und die Vergrößerungsfunktion $V(\eta)$.

Übertragungsfunktion	Vergrößerungsfunktion
$\overline{h}(\Omega) = \frac{\overline{Q}(\Omega)}{\overline{F}(\Omega)}$	$\overline{V}(\eta) = \frac{Q(\eta)}{\overline{F}(\eta)/k} = \frac{Q(\eta)}{\overline{q}^{st}}$
$\overline{h}(\Omega) = \frac{1}{k}\frac{1}{(1-\eta^2)+i2D\eta}$	$\overline{V}(\eta) = \frac{1}{(1-\eta^2)+i2D\eta}$
$\overline{h}(\Omega) = h(\Omega)\,e^{i\alpha(\Omega)}$	$\overline{V}(\eta) = V(\eta)\,e^{-i\epsilon(\eta)}$
$h(\Omega) = \frac{1}{k}\frac{1}{\sqrt{(1-\eta^2)^2+(2D\eta)^2}}$	$V(\eta) = \frac{1}{\sqrt{(1-\eta^2)^2+(2D\eta)^2}}$
$\tan\alpha(\Omega) = -\frac{2D\eta}{1-\eta^2}$	$\tan\epsilon(\eta) = \frac{2D\eta}{1-\eta^2}$

$Q(\eta) = \frac{F}{k}V(\eta)$; $\eta = \frac{\Omega_i}{\omega_i}$

$Q(\Omega_k) = h(\Omega_k)\,F(\Omega_k)$

Lösungsmethode: Ansatz vom Typ der rechten Seite

$f(t)$	Lösungsansatz
F	C
Ft^n ($n \geq 0$, ganzzahlig)	$C_o + C_1 t + \ldots + C_{n-1}t^{n-1} + C_n t^n$
Fe^{rt} (r reell oder komplex)	Ce^{rt}
$F\cos\Omega t$	$Q^s\sin\Omega t + Q^c\cos\Omega t$
$F\sin\Omega t$	$Q^s\sin\Omega t + Q^c\cos\Omega t$
$Ft^n e^{rt}\cos\Omega t$	$e^{rt}[(Q_o^c + Q_1^c t + \ldots + Q_n^c t^n)\cos\Omega t \ldots$ $+ (Q_o^s + Q_1^s t + \ldots + Q_n^s t^n)\sin\Omega t]$
$Ft^n e^{rt}\sin\Omega t$	$e^{rt}[(Q_o^c + Q_1^c t + \ldots + Q_n^c t^n)\cos\Omega t \ldots$ $+ (Q_o^s + Q_1^s t + \ldots + Q_n^s t^n)\sin\Omega t]$

Anmerkungen:

1. Besteht $f(t)$ aus einer Summe der oben angegebenen Ausdrücke, dann ist der Lösungsansatz die Summe der dazugehörenden Ansätze.

2. Im Falle von n-facher Resonanz ist der Lösungsansatz mit t^n durchzumultiplizieren.

I	Direkte Lösung	
Erregung	$\overline{f}_k(t) = \overline{F}_k e^{i\Omega t}$ mit $\overline{F}_k = F_k e^{-i\psi_k}$	$\overline{\underline{f}}(t) = \overline{\underline{F}}e^{i\Omega t}$
Antwort	$\overline{q}_k(t) = \overline{Q}_k e^{i\Omega t}$ mit $\overline{Q}_k = Q_k e^{-i\gamma_k}$	$\overline{\underline{q}}(t) = \overline{\underline{Q}}e^{i\Omega t}$
Lösung	$\overline{\underline{K}}(\Omega)\cdot\overline{\underline{Q}} = \overline{\underline{F}}$ $\overline{\underline{K}}(\Omega) = [\underline{K} - \underline{M}\Omega^2 + i\underline{D}\Omega]$	$\boxed{k = m\omega_0^2}$!
	$\overline{Q}_k(\Omega) = \frac{\overline{Z}_k(\Omega)}{\overline{\Delta}(\Omega)}$ mit $\overline{\Delta}(\Omega) = \det[\overline{\underline{K}}(\Omega)]$ $\overline{Z}_k(\Omega)$: Determinate der Matrix, die sich ergibt, wenn man in $\overline{\underline{K}}(\Omega)$ die k-te Spalte durch $\overline{\underline{F}}$ ersetzt. $Q_k(\Omega) = \frac{\lvert\overline{Z}_k(\Omega)\rvert}{\lvert\overline{\Delta}(\Omega)\rvert}$ Cramer $\gamma_k = -(\arg\overline{Z}_k(\Omega) - \arg\overline{\Delta}(\Omega))$ $q_k(t) = Q_k\cos(\Omega t - \gamma_k)$	$\overline{\underline{Q}} = \overline{\underline{H}}(\Omega)\cdot\overline{\underline{F}}$ mit $\overline{\underline{H}}(\Omega) = [\overline{\underline{K}}(\Omega)]^{-1}$ $\underline{q}(t) = \mathrm{Re}\{\overline{\underline{q}}(t)\}$
II	Modale Berechnung (Bei Proportionaldämpfung)	
Erregung	$\overline{\underline{f}}(t) = \overline{\underline{F}}e^{i\Omega t}$	
Antwort	$\underline{q}(t) = \underline{\Phi}\underline{p}(t)$	$\overline{\underline{q}}(t) = \overline{\underline{Q}}e^{i\Omega t}$ mit $\overline{\underline{Q}} = \underline{\Phi}\overline{\underline{H}}^q(\Omega)\underline{\Phi}^T\overline{\underline{F}}$ $= \left[\sum_{r=1}^{n}\underline{\varphi}_r\overline{h}_r^q(\Omega)\underline{\varphi}_r^T\right]\overline{\underline{F}}$
Lösung	Berechnung der Eigenfrequenzen, Eigenvektoren und der benötigten generalisierten Größen	
	$m_k^q\ddot{p}_k + d_k^q\dot{p}_k + k_k^q p_k = f_k^q(t)$ $\ddot{p}_k + 2\delta_k\dot{p}_k + \omega_k^2 p_k = \frac{1}{m_k^q}f_k^q(t)$ Berechnung der $p_k(t)$ wie unter 1 FHG (komplex) beschrieben Rücktransformation mit $\underline{q}(t) = \underline{\Phi}\underline{p}(t)$	$\overline{h}_r^q(\Omega) = \frac{1}{k_r^q - m_r^q\Omega^2 + id_r^q\Omega}$ $= \frac{1}{k_r^q}\cdot\frac{1}{1-\frac{\Omega^2}{\omega_r^2}+i2D_r\frac{\Omega}{\omega_r}}$ Einsetzen in Antwortgleichung für $\overline{\underline{q}}(t)$ $\underline{q}(t) = \mathrm{Re}\{\overline{\underline{q}}(t)\}$

- Resonanz: $\Delta(\Omega) = 0$ und $Z_k(\Omega) \neq 0$ für $\Omega = \Omega_i^R = \omega_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$
  Ein ungedämpftes System mit n Freiheitsgraden hat n Resonanzfrequenzen Ω_i^R, die gleich den Eigenfrequenzen ω_i sind.
- Tilgung: $Z_k(\Omega) = 0$ und $\Delta(\Omega) \neq 0$ für $\Omega = \Omega_i^{T_k}$ = Tilgungsfrequenzen für die Koordinate q_k, abhängig vom Erregungsvektor $\underline{f}$.
- Scheinresonanz: $Z_k(\Omega) = 0$ und $\Delta(\Omega) = 0$ für $\Omega = \Omega^{T_k} = \Omega^R$

$\int_0^l A(x)B(x)\,dx$

A(x) \ B(x)	B_1	B_1 B_2	B_1 B_2
A_1	$\ell A_1 B_1$	$\frac{\ell}{2}A_1 B_2$	$\frac{\ell}{6}A_1(B_1 + B_2)$
A_2	$\frac{\ell}{2}A_2 B_1$	$\frac{\ell}{3}A_2 B_2$	$\frac{\ell}{6}A_2(B_1 + 2B_2)$
A_1	$\frac{\ell}{2}A_1 B_1$	$\frac{\ell}{6}A_1 B_2$	$\frac{\ell}{6}A_1(2B_1 + B_2)$
A_1 A_2	$\frac{\ell}{2}(A_1 + A_2)B_1$	$\frac{\ell}{6}(A_1 + 2A_2)B_2$	$\frac{\ell}{6}(2A_1B_1 + A_1B_2 \ldots$ $+ A_2B_1 + 2A_2B_2)$

$$h_{kk} = \sum_{\text{Alle Elemente}}\left[\underbrace{\int_0^l\frac{\overline{N}_k\overline{N}_k}{EA}dx}_{\text{Normalkraft}} + \underbrace{\int_0^l\frac{\overline{M}_k\overline{M}_k}{EI}dx}_{\text{Biegung}} + \underbrace{\int_0^l\frac{\overline{Q}_k\overline{Q}_k}{GA_s}dx}_{\text{Schub}} + \underbrace{\int_0^l\frac{\overline{M}_{Tk}\overline{M}_{Tk}}{GI_T}dx}_{\text{Torsion}} + \underbrace{\frac{\overline{N}_k\overline{N}_k}{k}}_{\text{Feder}} + \underbrace{\frac{\overline{M}_k\overline{M}_k}{k}}_{\text{Drehfeder}}\right]$$

$\overline{N}_\nu, \overline{M}_{T\nu}, \overline{M}_\nu, \overline{Q}_\nu$ = Schnittkräfte infolge einer Kraft $f_\nu = 1$ ($f_k = 0$ für $k \neq \nu$), die an der Stelle und in Richtung der Koordinate q_ν wirkt.

ω = Eigen-Kreis-Frequenz des ungedämpften Schwingers $[\frac{1}{s}]$

ω^d = Eigen-Kreis-Frequenz des gedämpften Schwingers $[\frac{1}{s}]$

d = Dämpfungskonstante $[\frac{Nt}{m}]$

δ = Abklingkoeffizient $[\frac{1}{s}]$

D = Dämpfungsgrad (Lehrsches Dämpfungsmaß) $[-]$

Λ = logarithmisches Dekrement $[-]$

mit:

$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

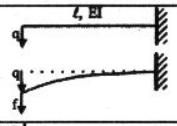
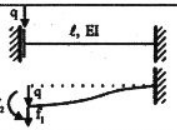
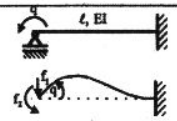
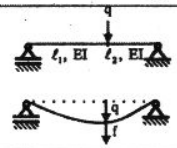
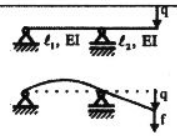
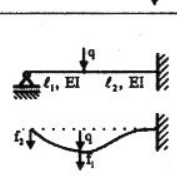
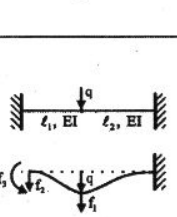
$\omega^d = \omega\sqrt{1-D^2} = \sqrt{\omega^2 - \delta^2}$

$\delta = \frac{1}{2}\frac{d}{m} = \omega\cdot D$

$D = \frac{\delta}{\omega} = \frac{1}{2}\frac{d}{\sqrt{mk}} = \frac{1}{2}\frac{d}{m\omega} = \frac{1}{2}\frac{d\omega}{k}$

$\Lambda = \frac{2\pi D}{\sqrt{1-D^2}}$

$f = \frac{EA}{\ell}q$

	$f = \frac{3EI}{\ell^3}q$	I
	$f_1 = \frac{12EI}{\ell^3}q$ $f_2 = -\frac{6EI}{\ell^2}q$	II
	$f_1 = -\frac{6EI}{\ell^2}q$ $f_2 = \frac{4EI}{\ell}q$	III
	$f = \frac{3EI(\ell_1+\ell_2)}{\ell_1^2\cdot\ell_2^2}q$	IV
	$f = \frac{3EI}{\ell_2^2(\ell_1+\ell_2)}q$	V
	$f_1 = \frac{4EI(\ell_1+\ell_2)^2}{\ell_1^2\cdot\ell_2^3\left(1+\frac{\ell_1}{3(\ell_1+\ell_2)}\right)}q$ $f_2 = -f_1\left(\frac{\ell_2}{\ell_1+\ell_2}\right)^2\left(1+\frac{\ell_1}{2(\ell_1+\ell_2)}\right)$	VI
	$f_1 = \frac{3EI(\ell_1+\ell_2)^3}{\ell_1^3\cdot\ell_2^3}q$ $f_2 = -f_1\left(\frac{\ell_2}{\ell_1+\ell_2}\right)^2\left(1+2\frac{\ell_1}{\ell_1+\ell_2}\right)$ $f_3 = f_1\ell_1\left(\frac{\ell_2}{\ell_1+\ell_2}\right)^2$	VII

$\varkappa = \frac{\omega^2 m}{k}$

$\frac{F}{\Delta\ell} = k = \frac{EA}{\ell}$

$\underline{q}(t) = \underline{\Phi}\,\underline{p}(t) \iff \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}$

$\underline{\Phi} = [\varphi_1\ \varphi_2\ \varphi_i]$

$q_2 = \varphi_{21}p_1 + \varphi_{22}p_2$

$p_{i\,max} = \frac{f_i^g}{k_i^g}DLF(\omega_i D_i)$

$T = \frac{1}{f}$ $\quad\omega = 2\pi f$

$DLF(\omega, D) = \frac{|q_{max}(\omega, D)|}{|q_{st}|}$