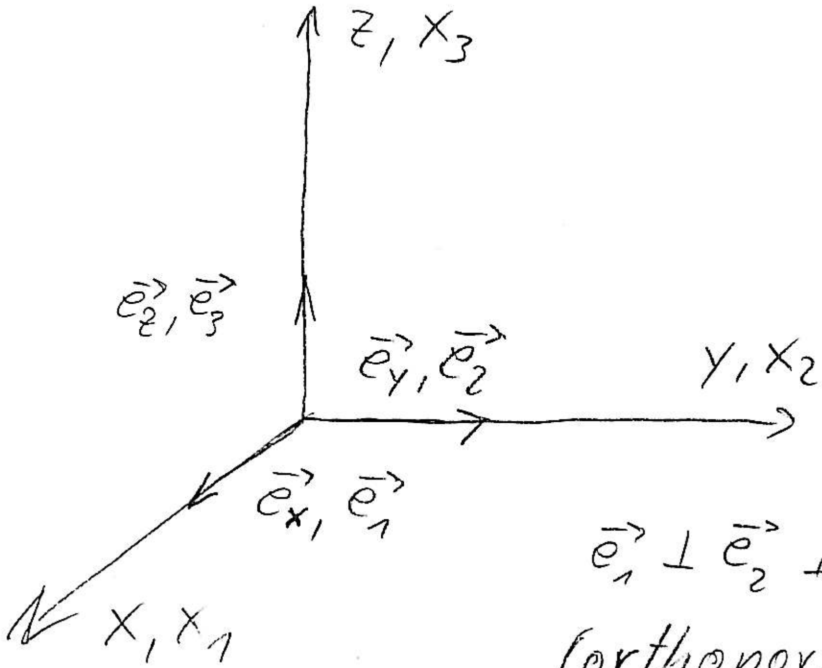
Einführung in die kartesische Tensorrechnung

Ziel: $c = \vec{a} \cdot \vec{b}$, $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, $\underset{\sim}{c} = \vec{a}\vec{b}$
in Indexschreibweise darzustellen.

kartesisches Koordinatensystem: (Rechtssystem)



$\vec{e}_1 \perp \vec{e}_2 \perp \vec{e}_3$
(orthonormiert)

1. Schreibweisen

1.1 Tensoren 0.-Stufe (Skalare)

z.B. Druck p

$p(x_1, x_2, x_3, t) = p(\vec{x}, t)$ 1 Zahl, Feldgröße

1.2 Tensoren 1.-Stufe (Vektoren)

z.B. Geschwindigkeit $\vec{u}$

$\vec{u} = u_1 \vec{e}_1 + u_2 \vec{e}_2 + u_3 \vec{e}_3$, $\vec{u} = \sum_{i=}^{3} u_i \vec{e}_i$

3 Zahlen, Betrag und Richtung

$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ Matrizenschreibweise

$u_i,\ i = 1,2,3$ Indexnotation

1.3 Tensoren 2.-Stufe (Dyaden)

z.B. Spannungstensor $\underset{\sim}{T}$

$\underset{\sim}{T} = \sum_{j=1}^{3} \sum_{i=1}^{3} \tau_{ij}\, \vec{e}_i \vec{e}_j$

9 Zahlen, 2 Richtungen zu jeder Komponente

$\underset{\sim}{T} = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{pmatrix}$ Matrix

$\tau_{ij},\ i,j = 1,2,3$ Indexschreibweise

Entsprechends gilt für Tensoren höherer Stufe.

2 Indizes

2.1 Stummer Index heißen doppelt auftretende Indizes

$a_i x_i\ ,\ b_{lk} x_l$
$\uparrow\ \ \uparrow\qquad \uparrow\ \ \uparrow$

Summationskonvention: Über doppelt auftretende Indizes muß summiert werden:

$$a_i x_i = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3$$

$$b_{lk} x_l = b_{1k} x_1 + b_{2k} x_2 + b_{3k} x_3$$

stumme Indizes treten im Ergebnis nicht mehr in Erscheinung daher der Name, sie dürfen umbenannt werden

$$b_{lk} x_l = b_{nk} x_n = b_{mk} x_m$$

2.2 Freier Index heißen einzeln auftretende Indizes $b_{lk} x_l$

In Gleichungen müssen die freien Indizes auf beiden Seiten <u>gleich sein</u>!

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\eta e_{ij}$$

$$c_i = w_i + v_i + \varepsilon_{ijk} \Omega_j x_k$$

oder auch

$$c_n = w_n + v_n + \varepsilon_{njk} \Omega_j x_k$$

Ein Index darf in einem Summand höchstens 2-mal auftreten;

$t_{ik} = a_{ij} b_{kj} r_j$ ↯ (falsch)

$t_i = \left(-p\,\delta_{ij} + 2\eta\, e_{ij}\right) n_j$

$= -p\,\delta_{ij} n_j + 2\eta\, e_{ij} n_j$ (richtig)

Die Anzahl der freien Indizes gibt die Tensorstufe an.

3 Punktprodukt (Skalarprodukt)

$c = \vec{a} \cdot \vec{b}\,, \quad c = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \cos(\sphericalangle\, \vec{a}, \vec{b})$

$\vec{a} = a_i \vec{e}_i\,, \quad \vec{b} = b_i \vec{e}_i$

$\Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = (a_i \vec{e}_i) \cdot (b_j \vec{e}_j) = a_i b_j (\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j)$

$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \underbrace{|\vec{e}_i|}_{=1}\,\underbrace{|\vec{e}_j|}_{=1} \cos(\sphericalangle\, \vec{e}_i, \vec{e}_j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$

Kronecker-Delta $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$

$\Rightarrow c = a_i b_j \delta_{ij} = a_i b_i \;(= a_j b_j)$

Das Kronecker-Delta tauscht Indizes aus, weiteres Beispiel

$\tau_{km} \delta_{mn} = \tau_{kn}\,,$ $\underline{\delta_{ij} = \delta_{ji}}$ symmetrischer Tensor! !

$c = \vec{a} \cdot \vec{b}$ symbolisch

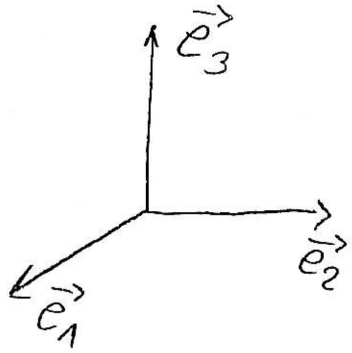
$c = a_i b_i$ Indexnotation

4 Vektorprodukt

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}\,, \quad \vec{c} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\,\sin(\sphericalangle\, \vec{a}, \vec{b})\, \vec{c}^{\,0}$$

$$\vec{c} = c_i \vec{e}_i\,, \quad \vec{a} = a_i \vec{e}_i\,, \quad \vec{b} = b_i \vec{e}_i$$

$$\vec{c} = (a_i \vec{e}_i) \times (b_j \vec{e}_j) = a_i b_j\, (\vec{e}_i \times \vec{e}_j)$$



$$\vec{e}_1 \times \vec{e}_1 = 0 \quad \vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3 \quad \vec{e}_1 \times \vec{e}_3 = -\vec{e}_2$$

$$\vec{e}_2 \times \vec{e}_1 = -\vec{e}_3 \quad \vec{e}_2 \times \vec{e}_2 = 0 \quad \vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_1$$

$$\vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_2 \quad \vec{e}_3 \times \vec{e}_2 = -\vec{e}_1 \quad \vec{e}_3 \times \vec{e}_3 = 0$$

Einführung des ε-Symbols:

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{w.d. Zahlenfolge } ijk \text{ eine gerade Permutation von 123 ist, d.h. } 123,\ 231,\ 312 \\ 0, & \text{wenn zwei Indizes gleich sind} \\ -1, & \text{w.d. Zahlenfolge } ijk \text{ eine ungerade Permutation von 123 ist, d.h. } 213,\ 132,\ 321 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{e}_i \times \vec{e}_j = \varepsilon_{ijk}\, \vec{e}_k$$

$$\Rightarrow \vec{c} = a_i b_j \varepsilon_{ijk} \vec{e}_k \left(= \underbrace{a_i b_j \varepsilon_{ij1}}_{=c_1} \vec{e}_1 + \underbrace{a_i b_j \varepsilon_{ij2}}_{=c_2} \vec{e}_2 + \underbrace{a_i b_j \varepsilon_{ij3}}_{=c_3} \vec{e}_3\right),$$

Das Vektorprodukt in Indexnotation:

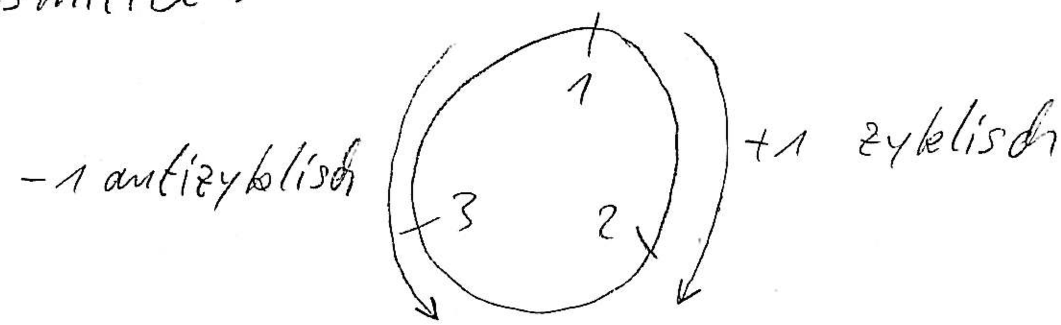
$$c_k = \varepsilon_{ijk}\, a_i b_j \quad \text{(Komponentenangabe)}$$

es gilt ferner

$$\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{jik} = \varepsilon_{jki} = -\varepsilon_{kji} = \varepsilon_{kij}$$

$$\Rightarrow c_k = \varepsilon_{kij}\, a_i\, b_j$$

Hilfsmittel:



5 Tensorprodukt

$\underset{\sim}{c} = \vec{a}\,\vec{b}$ (kein Punkt)

$$\underset{\sim}{c} = (a_i \vec{e}_i)(b_j \vec{e}_j) = a_i b_j\, \vec{e}_i \vec{e}_j = c_{ij}\, \vec{e}_i \vec{e}_j$$

$\Rightarrow c_{ij} = a_i b_j$ Tensorprodukt in Index-notation

Das Tensorprodukt erhöht die Stufe des resultierenden Tensors, hier 2.-Stufe

Eigenschaften: $\vec{e}_i \vec{e}_j \neq \vec{e}_j \vec{e}_i$

$$a_i b_j = b_j a_i$$

aber $a_j b_i \neq a_i b_j$!

es sei denn symmetrisch