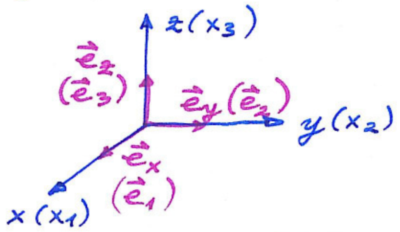
# EINFÜHRUNG IN DIE KARTES. TENSORRECHNUNG

## 1. SCHREIBWEISEN

Ziel: $c = \vec{a} \cdot \vec{b}$ Pkt. prod. / $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ kreuz -"- $\overset{\text{in}}{\Rightarrow}$ INDEXSCHREIBWEISE darzustellen

(Bem.: Viele Veröffentl.en enthalten Index-Not. & diese Schreibweise ist deutlich kürzer!)

- Verwendet wird ein kartes. Koord. syst. (Rechts-Syst. / Daumen-Regel)




- Man unterscheidet nun Tensoren unterschiedl. Stufe:

* Tensor 0. Stufe = skalare Größen, d.h. Zahlenwerte, i.d.R. Feldgrößen, also Fkt.en des Ortes
[$p, \rho, m$]
$p = p(x,y,z)$ bzw. $p = p(x_1, x_2, x_3)$

* Tensor 1. Stufe = Vektoren, d.h. gerichtete Größen mit Betrag + Richt.
[$\vec{u}, \vec{F}$]

$\vec{u} = u\,\underbrace{\vec{e}_x} + v\,\underbrace{\vec{e}_y} + w\,\underbrace{\vec{e}_z}$

bzw. $\vec{u} = u_1 \underbrace{\vec{e}_1} + u_2 \underbrace{\vec{e}_2} + u_3 \underbrace{\vec{e}_3}$

Kompon. des Vektors, wobei $u_1 = u_1(x_1, x_2, x_3)$
Basisvektoren
3 Zahlen, Betrag & Richt.

gemischte Schreibweise:
$$\vec{u} = \underbrace{\sum_{i=1}^{3}}_{\text{1 Summenzeichen}} u_i \vec{e}_i$$

Matrizenschreibw.:
$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

INDEXNOT.:
$u_i$ $(i = 1,2,3)$ → einfach die allg. Kompon.

* Tensor 2. Stufe = Dyaden
[$\underset{\sim}{T}$]

$$\begin{aligned} \underset{\sim}{T} = {} & \tau_{11}\underbrace{\vec{e}_1\vec{e}_1} + \tau_{12}\underbrace{\vec{e}_1\vec{e}_2} + \tau_{13}\underbrace{\vec{e}_1\vec{e}_3} \\ & + \tau_{21}\underbrace{\vec{e}_2\vec{e}_1} + \tau_{22}\underbrace{\vec{e}_2\vec{e}_2} + \tau_{23}\underbrace{\vec{e}_2\vec{e}_3} \\ & + \tau_{31}\underbrace{\vec{e}_3\vec{e}_1} + \tau_{32}\underbrace{\vec{e}_3\vec{e}_2} + \tau_{33}\underbrace{\vec{e}_3\vec{e}_3} \end{aligned}$$

9 Kompon. für jew. 2 Basisvektoren
9 Zahlen, 2 Richt.en zu jeder Komponente

gemischte Schreibw.:
$$\underset{\sim}{T} = \underbrace{\sum_{j=1}^{3} \sum_{i=1}^{3}}_{\text{Doppelsumme, um alle Kombinationen zu erhalten}} \tau_{ij} \vec{e}_i \vec{e}_j$$

Matrix:
$$\underset{\sim}{T} = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{pmatrix}$$

INDEXNOT.:
$\tau_{ij}$ $(i,j = 1,2,3)$
→ nur 1 Kompon. für alle 9 (s.o.)

I ⚠ Beim Tensor 0. Stufe → keine (0) Einheitsvektoren
-"- 1. St. → zu jeder Kompon. 1 Einh.vekt. $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$
-"- 2. St. → -"- 2 Einh.vekt. $\vec{e}_1\vec{e}_1, \vec{e}_1\vec{e}_2, \vec{e}_2\vec{e}_2$ ... etc.

## 2. INDIZES

Bei den Indizes unterscheidet man nur

* STUMMER INDEX = doppelt auftretende Indizes

Bsp.: $a_i x_i$, $b_{lk} x_l$, $b_{lk} x_k$

II Summationskonvention / Regel:
Aufsummieren immer nur über doppelt auftret. Indizes, also stumme Ind., d.h.:

$$a_i x_i = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3$$

$$b_{lk} x_l = a_{1k} x_1 + a_{2k} x_2 + a_{3k} x_3$$

$$b_{lk} x_k = a_{l1} x_1 + a_{l2} x_2 + a_{l3} x_3$$

↪ alle stummen Indizes "verschwinden" & werden zu einer Ziffer / Zahl; daher auch der Name.
Sie dürfen deshalb immer paarweise beliebig umbenannt werden, d.h.:

$$a_i x_i = a_l x_l = a_j x_j = a_* x_*$$

$$b_{lk} x_l = b_{nk} x_n = b_{mk} x_m = b_{pk} x_p$$

* FREIER INDEX = einzeln auftret. Indizes

Bsp.: $b_{lk} x_l$

III In Gleichungen müssen die freien Indizes auf beiden Seiten gleich sein!

z.B.: $\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\eta e_{ij} \xrightarrow{ij}$ nur freie Ind. / keine stumme Ind

$c_i = w_i + v_i + \varepsilon_{ijk} \Omega_j x_k \xrightarrow{i}$ 1 freier Ind. / $j,k$ = " "

≙ $c_n = w_n + v_n + \varepsilon_{njk} \Omega_j x_k \xrightarrow{n}$ " / $j,k$ = " "

↪ $i$ konsequent zu $n$ umbenannt in allen Summanden

IV Ein Index darf in einem Summanden höchstens 2-mal auftreten, d.h.

$t_{ik} = a_{ij} b_{jk} n_j$ ⚡⚡ FALSCH, da "j" 3x enthalten ⚡⚡

$t_{ik} = a_{ij} b_k n_j$ ✓ korrekt!

oder $t_i = (-p\delta_{ij} + 2\eta e_{ij}) n_j = -p\delta_{ij} n_j + 2\eta e_{ij} n_j$ (j jew. nur 2 x)

V Anzahl der freien Ind. gibt Stufe des Tensors an!

$a_i x_i$ – 0 freie Ind. → Tensor 0. Stufe

$u_i$ – 1 " " → " 1. "

$\tau_{ij}$ – 2 " " → " 2. "

## Aufg. 2

a) Ausschreiben von $A_{ii}$, $B_{ijj}$, $c_{ij} x_i x_j$ $[i,j = 1,2,3]$

- $\underbrace{A_{ii}}_{\text{stumm}} = A_{11} + A_{22} + A_{33}$

- $B_{ijj} = B_{i11} + B_{i22} + B_{i33}$ (frei: $i$; stumm: $jj$) $\hookrightarrow$
$$i=1: \quad B_{1jj} = B_{111} + B_{122} + B_{133}$$
$$i=2: \quad B_{2jj} = B_{211} + B_{222} + B_{233}$$
$$i=3: \quad B_{3jj} = B_{311} + B_{322} + B_{333}$$

- $c_{ij} x_i x_j = c_{11} x_1 x_1 + c_{12} x_1 x_2 + c_{13} x_1 x_3 +$
$c_{21} x_2 x_1 + c_{22} x_2 x_2 + c_{23} x_2 x_3 +$
$c_{31} x_3 x_1 + c_{32} x_3 x_2 + c_{33} x_3 x_3$

2x stumm, kein freier Ind.

b) Vereinfache $(A_{ijk} + A_{jki} + A_{jik}) x_i x_j x_k$!

$\hookrightarrow$ ausmultipliziert:

auch mögliche Umbenennung $A_{emn} x_m x_e x_n$

$$A_{ijk} x_i x_j x_k + A_{\underset{ijk}{jki}} x_{\underset{k}{i}} x_{\underset{i}{j}} x_{\underset{j}{k}} + \overbrace{A_{\underset{ij}{jik}} x_{\underset{j}{i}} x_{\underset{i}{j}} x_k}$$

nur stumme Indizes, d.h. umbenennen möglich

Ziel: $A_{ijk}$ immer vorne

$$\rhd A_{ijk} x_i x_j x_k + A_{ijk} x_k x_i x_j + A_{ijk} x_j x_i x_k$$

$x_i - x_j - x_k$ = Zahlen
einfach Reihenfolge vertauschen
$(2 \cdot 3 \cdot 5 \overset{!}{=} 3 \cdot 5 \cdot 2 \overset{!}{=} 2 \cdot 5 \cdot 3)$

$$\rhd A_{ijk} x_i x_j x_k + A_{ijk} x_i x_j x_k + A_{ijk} x_i x_j x_k$$

$$=$$

$$\underline{\underline{3 A_{ijk} x_i x_j x_k}}$$

stellvertretend für 81 Summanden, da $3 \cdot \underbrace{3^3}_{27}$

# 3. PUNKTPRODUKT / SKALARPROD.

Mathe: Das Skalarprod. zweier Vektoren $\vec{a}$ u. $\vec{b}$ berechnet sich nach der Formel

$$(*)\quad c = \vec{a}\cdot\vec{b} = \underbrace{|\vec{a}||\vec{b}|}_{\text{Längen der Vektoren}} \cos\underbrace{(\sphericalangle\, \vec{a}, \vec{b})}_{\text{Winkel zwischen den beiden Vektoren}}$$

Wie zuvor def., gilt auch hier analog (so wie für die Geschw.) in gemischter Schreibweise:

$$\left.\begin{aligned}\vec{a} &= a_i\,\vec{e}_i = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3\\ \vec{b} &= b_i\,\vec{e}_i = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3\end{aligned}\right\}\ \vec{a}\cdot\vec{b} \neq (a_i\,\vec{e}_i)\cdot(b_i\,\vec{e}_i)\ ?$$

↳ Erinnerung Regel IV
Index 2x höchstens - hier 4x

Deshalb: $\vec{a}\cdot\vec{b} = (a_i\,\vec{e}_i)\cdot(b_j\,\vec{e}_j)$

$$= a_i\,b_j\,(\vec{e}_i\cdot\vec{e}_j)$$

$$(*)\ \text{mit}\ \vec{e}_i\cdot\vec{e}_j = \underbrace{|\vec{e}_i|}_{=1}\underbrace{|\vec{e}_j|}_{=1}\underbrace{\cos(\sphericalangle\,\vec{e}_i, \vec{e}_j)}_{0\ \text{oder}\ 1} - \begin{cases}1, & i=j,\ \text{parallele}\ \vec{e}_i - \vec{e}_j \to \sphericalangle = 0,\ \cos(0) = 1\\ 0, & i\neq j,\ \perp\ \text{Vektoren, orthonorm. Basis}\end{cases}$$

$$\hookrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

In INDEX-Not. Einführung des KRONECKER-DELTA $\delta_{ij}$ anstelle von $(\vec{e}_i\cdot\vec{e}_j)$:

$$\delta_{ij} = \begin{cases}1 & \text{falls}\ i=j\\ 0 & \text{〃}\ \ i\neq j\end{cases}$$

VI

Kronecker-Delta = ein mathemat. Zeichen, das durch ein kleines $\delta$ mit 2 Indizes $i$ u. $j$ typischerweise dargestellt wird.

$$\text{für}\ i,j = 1,2 \ \to\ \delta = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\quad \text{symmetr. Tensor}:\ \delta_{ij} = \delta_{ji}$$

Somit resultiert für das Skalarprod. in INDEX-Notation mit $\delta_{ij}$:

$$\boxed{c = a_i\,b_j\,\delta_{ij}}\qquad (\text{Vergleich: } c = \vec{a}\cdot\vec{b})$$

denn

$$c = \underbrace{a_1 b_j\,\delta_{1j}}_{\substack{\text{nur } j=1\\ \neq 0}} + \underbrace{a_2 b_j\,\delta_{2j}}_{\substack{\text{nur } j=2\\ \neq 0}} + \underbrace{a_3 b_j\,\delta_{3j}}_{\substack{\text{nur } j=3\\ \neq 0}}$$

$$= a_1 b_1(\cdot 1) + a_2 b_2(\cdot 1) + a_3 b_3(\cdot 1)$$

$$\boxed{\hat{=}\ a_i\,b_i}$$

VII

Das Kronecker-Delta tauscht Indizes aus:

$$a_i\,\cancel{b_j}\,\cancel{\delta_{ij}} = a_i\,b_i = a_j\,b_j$$

$$\tau_{k\cancel{m}}\,\cancel{\delta_{mn}} = \tau_{kn}$$

Vorgehensweise:
1. suche stummen Index im Ausdruck
2. Streiche –"– in $\delta$ & anderer Kompon. durch
3. Ersetze in der Kompon. an der Stelle, wo vorher der stumme Ind. stand, den 2. Index von $\delta$

$\Rightarrow$ zus. fassend $c = \vec{a} \cdot b$ symbol. Pkt. prod. ⊛

$c = a_i b_i$ Indexnot.

⊛ bekannt: Komponentenweise Multiplizieren der Koord. der Vekt. & anschließ. Aufsummieren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad \& \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad \text{im n-dim. Raum}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

Wdh.: $\vec{a} \rightarrow a_i$ Tensor 1. Stufe; $\underset{\sim}{B} \rightarrow b_{jk}$ " 2. " } Skalarprod. ≙ Tensor 1. Stufe

symbol.: $\vec{d} = \vec{a} \cdot \underset{\sim}{B}$

INDEX: $d_k = a_i b_{\cancel{j}k} \delta_{i\cancel{j}}$ oder $d_k = a_{\cancel{i}} b_{jk} \delta_{\cancel{i}j}$

$$\underbrace{= a_i b_{ik} \qquad\qquad = a_j b_{jk}}_{\text{gleiches Ergebnis}}$$

Bemerk.:

Das Skalarprod. zw. Tensoren > als 1. Stufe ist im Allg. nicht mehr kommutativ:

symbol.: $\vec{a} \cdot \underset{\sim}{B} \neq \underset{\sim}{B} \cdot \vec{a}$

INDEX: $\underbrace{a_i b_{ik} \neq \underbrace{b_{ik} a_{\cancel{i}} \delta_{k\cancel{i}}}_{=} \; b_{ik} a_k = a_k b_{ik}}_{a_i b_{ik} \neq a_k b_{ik}}$ bzw. $\underbrace{a_j b_{jk} \neq \underbrace{b_{jk} a_{\cancel{i}} \delta_{k\cancel{i}}}_{=} \; b_{jk} a_k = a_k b_{jk}}_{a_j b_{jk} \neq a_k b_{jk}}$

# 4. VEKTORPRODUKT / KREUZPROD.

auch hier **Ziel:** $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ in Ind. not. kürzer auszudrücken

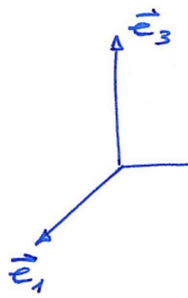
bekannt:

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

Wie beim Skalarprod. auch hier in gemischter Schreibweise:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{c} = c_i \vec{e}_i \\ \vec{a} = a_i \vec{e}_i \\ \vec{b} = \underbrace{b_i}_{\text{nur Zahlen}} \vec{e}_i \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \vec{c} \neq (a_i \vec{e}_i) \times (b_i \vec{e}_i) \text{ ? } \ \lightning \text{ Regel } \underline{IV} \text{-Verstoß} \\ = (a_i \vec{e}_i) \times (b_j \vec{e}_j) \\ = a_i b_j (\vec{e}_i \times \vec{e}_j) \end{array}$$

Kreuzprod. der Einheitsvektoren:
(Hilfe: Rechtssyst. & Rechte-Hand-Regel)




$$\vec{e}_1 \times \vec{e}_1 \overset{0}{=} 0 \qquad \vec{e}_1 \times \vec{e}_2 \overset{1}{=} \vec{e}_3 \qquad \vec{e}_1 \times \vec{e}_3 \overset{-1}{=} -\vec{e}_2$$
$$\vec{e}_2 \times \vec{e}_1 \overset{-1}{=} -\vec{e}_3 \qquad \vec{e}_2 \times \vec{e}_2 \overset{0}{=} 0 \qquad \vec{e}_2 \times \vec{e}_3 \overset{1}{=} \vec{e}_1$$
$$\vec{e}_3 \times \vec{e}_1 \overset{1}{=} \vec{e}_2 \qquad \vec{e}_3 \times \vec{e}_2 \overset{-1}{=} -\vec{e}_1 \qquad \vec{e}_3 \times \vec{e}_3 \overset{0}{=} 0$$

↪ Folgt man den Indizes der Einheitsvektoren beim "Kreuzen" & dem Ergebnis, erkennt man

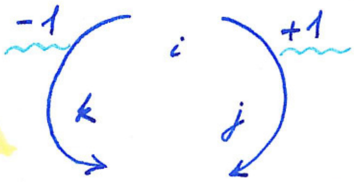
| | | |
|---|---|---|
| 11 ⇒ 0 | 123 ⇒ 1 | 132 ⇒ −1 |
| 213 ⇒ −1 | 22 ⇒ 0 | 231 ⇒ 1 |
| 312 ⇒ 1 | 321 ⇒ −1 | 33 ⇒ 0 |

$$\begin{cases} 1 & 123,\ 231,\ 312 \\ 0 & 11,\ 22,\ 33 \\ -1 & 132,\ 321,\ 213 \end{cases}$$

Wie zuvor beim Pkt.prod. anstelle $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j \to \delta_{ij}$ eingeführt auch hier zur Vereinfachung:

Einführung des **ε-Symbols**

VIII ⚠




$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{wenn Zahlenfolge } ijk = \text{gerade Permutation} \\ 0 & \text{" 2 Indizes gleich} \\ -1 & \text{" Zahlenfolge } ijk = \text{unger. Permut.} \end{cases}$$

gerade: 123, 231, 312
un –"– : 213, 132, 321

$$\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{jki} = \varepsilon_{kij} \quad (1)$$
$$= -\varepsilon_{jik} = -\varepsilon_{kji} = -\varepsilon_{ikj} \quad (-1)$$

Somit resultiert für das Kreuzprod. in INDEX-Not. mit $\varepsilon_{ijk}$:

- für Einheitsvektoren: $\vec{e}_i \times \vec{e}_j = \varepsilon_{ijk}\, \vec{e}_k = \varepsilon_{ij1}\vec{e}_1 + \varepsilon_{ij2}\vec{e}_2 + \varepsilon_{ij3}\vec{e}_3$
- & für $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$: gemischte Schreibw.

$$\vec{c} = a_i b_j \varepsilon_{ijk} \vec{e}_k = \underbrace{a_i b_j \varepsilon_{ij1}}_{c_1} \vec{e}_1 + \underbrace{a_i b_j \varepsilon_{ij2}}_{c_2} \vec{e}_2 + \underbrace{a_i b_j \varepsilon_{ij3}}_{c_3} \vec{e}_3$$

- INDEX-Not.:

$$\boxed{c_k = \varepsilon_{ijk}\, a_i b_j} \quad \text{oder } \varepsilon_{kij}\, a_i b_j \quad \text{usw.}$$

## Zusätzliche Bemerkungen:

- zu Regel IV: Bei mehr als 2 Indizes in einem Summanden, ist die Eindeutigkeit verletzt!

Bsp.: 3 Ind. in einem Summanden

$$A_{iik}\, x_i = b_k$$

$i=1$ $\quad A_{i1k}\,x_1 + A_{i2k}\,x_2 + A_{i3k}\,x_3 \longrightarrow A_{11k}\,x_1 + A_{12k}\,x_2 + A_{13k}\,x_3$

$i=2$ $\quad \longrightarrow A_{21k}\,x_1 + A_{22k}\,x_2 + A_{23k}\,x_3$

$i=3$ $\quad \longrightarrow A_{31k}\,x_1 + A_{32k}\,x_2 + A_{33k}\,x_3$

ODER

$i=1$ $\quad A_{1ik}\,x_1 + A_{2ik}\,x_2 + A_{3ik}\,x_3 \longrightarrow A_{11k}\,x_1 + A_{21k}\,x_2 + A_{31k}\,x_3$

$i=2$

bereits bei der 1. Komp. erkennbar, dass unterschiedl. Ergebnisse / Komponenten

- zu $\delta_{ij}$ & Skalarprod.:

es ist egal, ob $a_i\, b_j\, \delta_{ij}$ oder $\delta_{ij}\, a_i\, b_j$

- zu $\varepsilon_{ijk}$ & Kreuzprod.:

auch hier ist es egal, ob $\varepsilon_{ijk}\, x_i\, x_j$ oder $x_i\, x_j\, \varepsilon_{ijk}$

- Bsp. zum Kreuzprod.:

$\underset{123}{\varepsilon_{ijk}}\ \underset{2}{b_j}\ \underset{1}{a_i} \ \hat{=}\!\!> \underset{1}{\vec{a}} \times \underset{2}{\vec{b}}$

$\underset{123}{\varepsilon_{ijk}}\ \underset{1}{a_i}\ \underset{2}{b_j} \ \hat{=}\!\!> \underset{1}{\vec{a}} \times \underset{2}{\vec{b}}$

denn: Achte auf die Reihenfolge der Indizes beim $\varepsilon$-Symbol (hier $i-j-k$) & trage in dieser analogen Reihenfolge die Komponenten auf (hier $i$ bei $a$ & $j$ bei $b$)

ABER:

$\underset{123}{\varepsilon_{jik}}\ \underset{1}{b_j}\ \underset{2}{a_i} \ \hat{=}\!\!> \underset{1}{\vec{b}} \times \underset{2}{\vec{a}}$, da in $\varepsilon$-Symbol zuerst $j$ vor $i$

$\underset{123}{\varepsilon_{jik}}\ \underset{2}{a_i}\ \underset{1}{b_j} \ \hat{=}\!\!> \underset{1}{\vec{b}} \times \underset{2}{\vec{a}}$

- zur gemischten Schreibweise von $\vec{c} = a_i\, b_j\, \varepsilon_{ijk}\, \vec{e}_k$ (s. vorherige Seite unten)

$$\vec{c} = a_1 b_2\, \varepsilon_{123}\, \vec{e}_3 + a_1 b_3\, \varepsilon_{132}\, \vec{e}_2 + a_2 b_1\, \varepsilon_{213}\, \vec{e}_3 + a_2 b_3\, \varepsilon_{231}\, \vec{e}_1 + a_3 b_1\, \varepsilon_{312}\, \vec{e}_2 + a_3 b_2\, \varepsilon_{321}\, \vec{e}_1$$

skalare Multipl. mit $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ $\longrightarrow$

$$c_1 = a_2 b_3\, \varepsilon_{231} + a_3 b_2\, \varepsilon_{321}$$
$$c_2 = a_1 b_3\, \varepsilon_{132} + a_3 b_1\, \varepsilon_{312}$$
$$c_3 = a_1 b_2\, \varepsilon_{123} + a_2 b_1\, \varepsilon_{213}$$

- noch ein Bsp. zu Regel IV (s.o.):

$$c_{ii}\,\delta_{ij} = c_{11}\,\delta_{1j} + c_{22}\,\delta_{2j} + c_{33}\,\delta_{3j} = c_{11} + c_{22} + c_{33} \longrightarrow \text{Skalar}$$

ABER: $c_{ii}\,\delta_{ij} = c_{ij}$ $\longrightarrow$ 2 freie Ind. $\hat{=}$ Tensor 2. Stufe

$\longrightarrow$ ⚡ EINDEUTIGKEIT

## Aufg. 3

a) • $\delta_{ii} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 1 + 1 + 1 = \underline{\underline{3}}$

keine freien Ind., Tensor 0. Stufe, d.h. Zahl

• $\delta_{i\cancel{j}} \delta_{i\cancel{j}} \hat{=} \delta_{ii} = \underline{\underline{3}}$ (Summanden => 1·0 od. 0·1 od. 3× 1·1)

als Austauschsymbol

• $\delta_{ij} \delta_{i\cancel{k}} \delta_{j\cancel{k}} = \delta_{i\cancel{j}} \delta_{i\cancel{j}} = \delta_{ii} = \underline{\underline{3}}$ (auch hier Summanden entw. 1·1·0, 0·1·1, 0·1·0 etc oder 1·1·1 = 1 (3×))

• $\varepsilon_{ijk}\, \varepsilon_{ijk}$ $(i,j,k = 1,2,3)$

$= \overset{(1)}{\varepsilon_{123}} \overset{(1)}{\varepsilon_{123}} + \overset{(-1)}{\varepsilon_{132}} \overset{(-1)}{\varepsilon_{132}}$ ⊛

$+ \overset{(1)}{\varepsilon_{231}} \overset{(1)}{\varepsilon_{231}} + \overset{(-1)}{\varepsilon_{213}} \overset{(-1)}{\varepsilon_{213}}$

$+ \overset{(1)}{\varepsilon_{312}} \overset{(1)}{\varepsilon_{312}} + \overset{(-1)}{\varepsilon_{321}} \overset{(-1)}{\varepsilon_{321}} = \underline{\underline{6}}$

oder anders in Schritten

$(k=1,2,3)$

$= \varepsilon_{ij1}\varepsilon_{ij1} + \varepsilon_{ij2}\varepsilon_{ij2} + \varepsilon_{ij3}\varepsilon_{ij3}$

(zusätzl. $j=1,2,3$) $= \underset{0}{\cancel{\varepsilon_{i11}\varepsilon_{i11}}} + \varepsilon_{i21}\varepsilon_{i21} + \varepsilon_{i31}\varepsilon_{i31}$

$+ \varepsilon_{i12}\varepsilon_{i12} + \underset{0}{\cancel{\varepsilon_{i22}\varepsilon_{i22}}} + \varepsilon_{i32}\varepsilon_{i32}$

$+ \varepsilon_{i13}\varepsilon_{i13} + \varepsilon_{i23}\varepsilon_{i23} + \underset{0}{\cancel{\varepsilon_{i33}\varepsilon_{i33}}}$

} alle Summanden mit 2 gleichen Ziffern = 0

(zuletzt: $i=1,2,3$): übrig bleiben die Summanden oben ⊛, 6 Terme entweder $(-1)\cdot(-1)$ oder $\underbrace{1\cdot 1}$

$\underline{\underline{6 \cdot 1 = 6}}$

b) • $a_i = \delta_{jl}\,\delta_{km}\,\varepsilon_{ilm}\, b_j c_k$

"2 Lös.wege":

$a_i = \delta_{j\cancel{l}}\, \delta_{k\cancel{m}}\, \varepsilon_{i\cancel{l}\cancel{m}}\, b_j c_k = \varepsilon_{ijk}\, b_j c_k$

$a_i = \delta_{\cancel{j}l}\, \delta_{\cancel{k}m}\, \varepsilon_{ilm}\, b_{\cancel{j}} c_{\cancel{k}} = \underbrace{\varepsilon_{ilm}\, b_l c_m}_{\text{Tensor 1. Stufe}}$

] $i = 1$ freier Index; hier sieht man wieder, dass stumme Ind. umbenennbar sind

=> es handelt sich hier um das Vektorprod. !!! $\vec{a} = \vec{b} \times \vec{c}$

1. Komponente:

$a_1 = \varepsilon_{1lm}\, b_l c_m = \varepsilon_{111}\, b_1 c_1 + \varepsilon_{112}\, b_1 c_2 + \varepsilon_{113}\, b_1 c_3 + \varepsilon_{121}\, b_2 c_1 + \varepsilon_{122}\, b_2 c_2 + \ldots$ etc.

c) $e_{ij} = e_{ji}$ symmetr. / Zeige, dass $\varepsilon_{ijk}\, e_{ij} = 0$

$\underline{\underline{\varepsilon_{ijk}\, e_{ij}}} = \varepsilon_{ijk}\, e_{ji}$

$\underset{-1}{k} \quad i \quad \overset{+1}{j}$

$= -\varepsilon_{jik}\, e_{ji}$

$\quad\ \ \ i\ \ j \qquad\ i\ \ j$

stumme Ind. umbenennen

$= \underline{\underline{-\varepsilon_{ijk}\, e_{ij}}}$

wenn $d_k = -d_k$

$\underline{\underline{\overset{!}{=} 0}}$ demzufolge