⊛ WIRBELSÄTZE

Generell lässt sich ein Geschwindigkeitsfeld in zwei überlagerte Felder aufteilen:

$$\vec{u} = \vec{u}_D + \vec{u}_R \quad \text{, wobei}$$

$$\text{rot } \vec{u}_D = \nabla \times \vec{u}_D = 0 \rightsquigarrow \text{rotationsfreies Feld!}$$

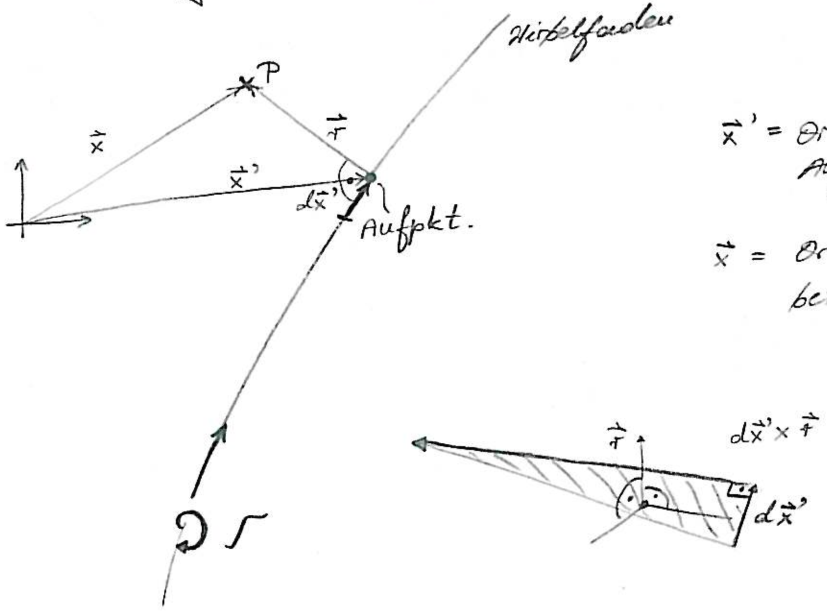
$$\text{div } \vec{u}_R = \nabla \cdot \vec{u} = 0 \rightsquigarrow \text{divergenzfreies –"–}$$

⟹ ACHTUNG: das nun zusammengesetzte Feld ist weder rot. frei noch div. frei!

$$\vec{u}_D = \nabla \phi \ , \quad \underbrace{\vec{u}_R = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_{(\text{Faden})} \frac{d\vec{x}' \times \vec{r}}{r^3}}_{\text{Biot-Sawartsche Gesetz}}$$

mit $\underbrace{d\vec{x}' = \ldots, \ \vec{r} = \vec{x} - \vec{x}' = \ldots}_{\text{für jeweiligen Fall in Aufg. definieren \& ausrechnen}}$

⟺ $\vec{u}$ = induzierte Geschwindigk. eines Wirbelfadens am Ort $\vec{x}$



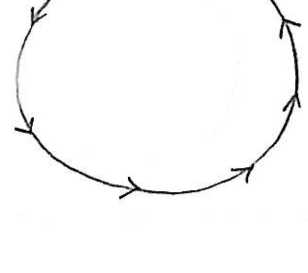
$\vec{x}'$ = Ortsvektor des Aufpkt.s

$\vec{x}$ = Ortsvektor des betrachteten Pkt.s P

⊛ ZIRKULATION

Γ = Summation der Geschwindigkeiten über ein geschlossenes Integral

$$\Gamma = \oint \vec{u} \, dx$$



⊛ 1. Thomsonsches / Kelvinsches Zirkulationstheorem:

↪ Zirkulation einer geschl. mat. Linie bleibt in reib.freier barotroper Flüssigk. mit Potential der Massenkraft konst.

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = 0$$

⊛ 1. Helmholtzsche Wirbelsatz:

↪ Zirkulation längs der Wirbelröhre = konst.

$$\oint_{C_1} \vec{u} \cdot d\vec{x} = \oint_{C_2} \vec{u} \cdot d\vec{x}$$

2. Helmholtzsche Wirbelsatz:

↪ Wirbelröhre besteht immer aus denselben Flüssigk.teilchen

3. Helmholtzsche W.s.:

↪ Zirkulation einer Wirbelröhre bleibt zeitlich konst.

Def.

⊛ Wirbelröhre = Materielle Röhre mit Rotation (analog Stromröhre)

Wirbelfaden = Wirbelröhre mit ∞-kleinem Querschnitt (analog Stromlinie)
(nicht mehr materiell)