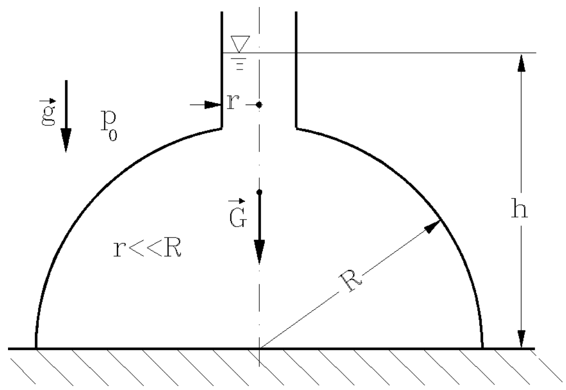
Aufgabe 1

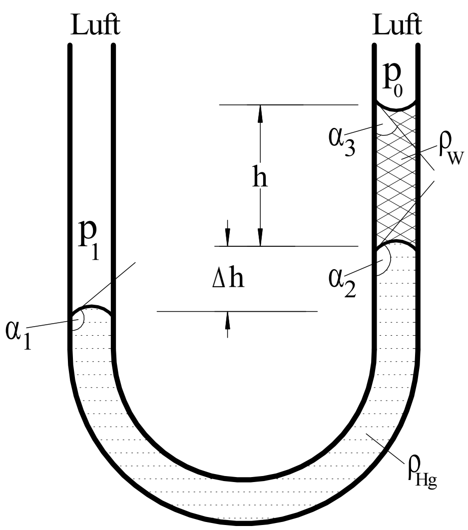
Eine mit Flüssigkeit (Dichte ϱ) gefüllte Halbkugel (Radius R) mit Einfüllstutzen (Radius r mit $r \ll R$) liegt auf einer ebenen Platte und dichtet durch ihr Eigengewicht G.

Wie hoch darf die Flüssigkeit im Behälter stehen (Höhe h), damit kein Leck auftritt?



Geg.: r, R, G, ϱ, g

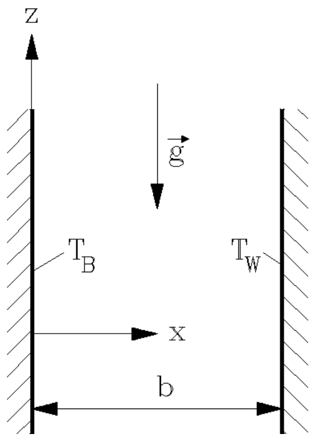
Aufgabe 2



Ein dünnes U-Rohr (Radius r), bei dem Kapillaritätseffekte nicht vernachlässigt werden dürfen, ist mit Quecksilber (ϱ_{Hg}) und Wasser (ϱ_w) gefüllt. Berechnen Sie die Druckdifferenz $p_1 - p_0$! (Die Kapillaritätskonstanten C_i, die Randwinkel α_i sowie r, $\triangle h$ und h_1 sind bekannt). Schätzen Sie mit den gegebenen Daten ab wie groß der relative Fehler ist, wenn man die Kapillaritätseffekte vergißt.

Geg.: $C_1 = C_{Hg\to Luft} = 0{,}472$ N/m, $C_2 = C_{Hg\to H_2O} = 0{,}426$ N/m, $C_3 = C_{H_2O\to Luft} = 0{,}0725$ N/m, $r = 1$ mm, $\triangle h = 0{,}1$ m, $h_1 = 0{,}05$ m, $\varrho_{Hg} = 13{,}54 * 10^3$ kg/m^3, $\varrho_W = 10^3$ kg/m^3

Aufgabe 3



Zwischen zwei Wänden, die durch Heizungen auf konstanter Temperatur T_B (an $x=0$) bzw. T_W (an $x=b$) gehalten werden, befindet sich Wasser der Viskosität η (η = const). Da Wände und Flüssigkeit in y– und z–Richtung unendlich ausgedehnt sind, ist die sich einstellende Temperatur des Wassers $T(x)$ nur eine Funktion von x. Die Dichte des Wassers ist temperaturabhängig:

$$\varrho = \overline{\varrho} + \alpha(\overline{T} - T(x)) \ ,$$

wobei $\overline{\varrho}$ der bei der mittleren Temperatur $\overline{T} = 1/2(T_B + T_W)$ ermittelte Wert der Dichte ist.

a) Zeigen Sie, daß infolge des Temperaturgradienten kein hydrostatisches Gleichgewicht möglich ist, so daß sich das Wasser in Bewegung setzen muß.
Hinweis: Die sich einstellende Strömung ist stationär und eben.

b) Zeigen Sie mit Hilfe der Kontinuitätsgeichung, daß die Geschwindigkeitskomponente u in x–Richtung im ganzen Feld identisch null ist.

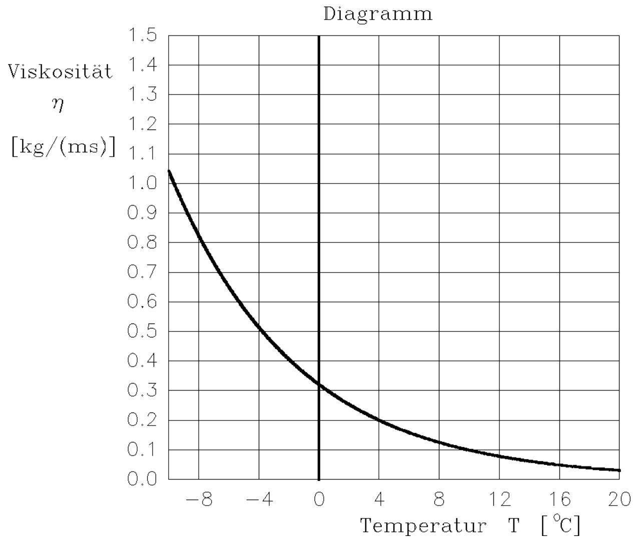
c) Berechnen Sie die Temperaturverteilung $T(x)$ im Wasser. (Die Dissipation kann dabei vernachlässigt werden, da der durch den Temperaturgradienten aufgeprägte Wärmestrom sehr viel größer ist als der durch Dissipation.)

d) Zeigen Sie, daß der Druck keine Funktion von x ist.

e) Zeigen Sie, daß $\partial p/\partial z$ eine Konstante sein muß, und berechnen Sie für $\partial p/\partial z = K$ die Geschwindigkeitsverteilung $w(x)$.

Geg.: η, $\overline{\varrho}$, T_B, T_W, α, b, g, K

Aufgabe 4



Bei sehr niedrigen Außentemperaturen kann Rohöl nur deshalb bei erträglichem Druckabfall durch Pipelines gepumpt werden, weil sich das Öl aufgrund der Dissipation erwärmt und somit die Scherviskosität abnimmt. Der Viskositäts-Temperatur-Zusammenhang für Rohöl ist im gezeigten Diagramm aufgetragen.

Die Strömung ist laminar, inkompressibel, die Temperatur und somit auch die Viskosität können als über den Rohrradius in etwa konstant angenommen werden. Die Strömungsgrößen ändern sich in Rohrachsenrichtung nicht.

Die mittlere Strömungsgeschwindigkeit des Öls $\overline{U}$, der Rohrdurchmesser R und die Umgebungstemperatur T_u sind bekannt. Der Wärmeverlust an die Umgebung pro Längeneinheit des Rohres kann durch die Formel

$$\dot{Q} = k\,(T - T_u)\,2\,\pi\,R \tag{1}$$

abgeschätzt werden, in der T die mittlere Öltemperatur ist.

a) Wie lautet die Gleichung für das Geschwindigkeitsprofil $u_z(r)$?

b) Bestimmen Sie die Dissipationsfunktion Φ. (Hinweis: Gehen Sie von der Bestimmungsgleichung für Φ in symbolischer Schreibweise aus und benutzen Sie Zylinderkoordinaten!)

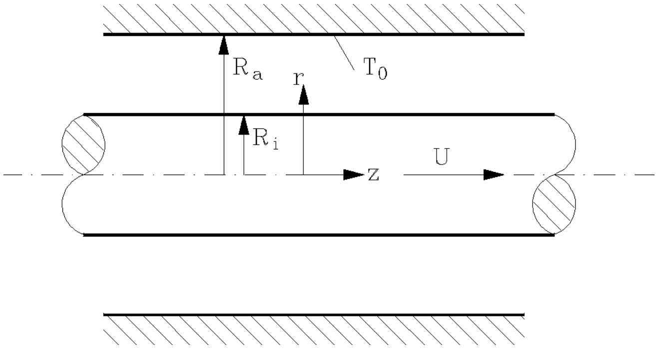
c) Wieviel Energie P_D wird pro Rohrlängeneinheit (in Abhängigkeit von der noch unbekannten Viskosität η) dissipiert?

d) Damit die Strömung von der Koordinate in Rohrachsenrichtung unabhängig ist, muß die dissipierte Energie als Wärme an die Umgebung abgegeben werden. Die Bedingung, daß dieser Wärmestrom der Gleichung (1) genügen muß, liefert einen Zusammenhang zwischen der noch unbekannten Viskosität und der sich einstellenden Öltemperatur. Tragen Sie diesen Zusammenhang in das Diagramm ein und bestimmen Sie so T und η.

e) Welcher Druckgradient $\partial p/\partial z$ stellt sich ein?

Geg.: $\overline{U} = 3\,\mathrm{m/s}$, $R = 0,5\,\mathrm{m}$, $T_u = -40°\,\mathrm{C}$ (Alaska), $k = 0,8\,\mathrm{W/(m^2K)}$ (isoliert !)

Aufgabe 5



Durch ein unendlich langes, mit Newtonscher Flüssigkeit (ϱ, η, λ = const) gefülltes Rohr (Radius R_a) wird ein Zylinder (Radius R_i) mit der Geschwindigkeit U gezogen. Die durch die Bewegung des Zylinders hervorgerufene Strömung sei stationär und rotationssymmtrisch. Das Rohr hat die konstante Temperatur T_0, der Zylinder ist isoliert ($\vec{q}=0$), daher ist $\partial T/\partial z = \partial T/\partial \varphi = 0$. Die inkompressible Flüssigkeit besitzt die konstante spezifische Wärmekapazität c.

a) Geben Sie das Geschwindigkeitsfeld der Schichtenströmung ($u_z = u_z(r)$, $u_\varphi = u_r = 0$) an.

b) Berechnen Sie die Dissipationsfunktion Φ aus den nichtverschwindenden Komponenten von $\mathbf{E}$: $e_{rz} = e_{zr}$.

c) Geben Sie, ausgehend von der Energiegleichung in der Form

$$\varrho \frac{\mathrm{D}e}{\mathrm{D}t} - \frac{p}{\varrho}\frac{\mathrm{D}\varrho}{\mathrm{D}t} = \Phi + \lambda \Delta T \; ,$$

die Differentialgleichung für die Temperatur $T(r)$ an.

d) Bestimmen Sie die homogene Lösung der Differentialgleichung für den Temperaturverlauf.

e) Bestimmen Sie die partikuläre Lösung (Hinweis: Benutzen Sie einen Ansatz der Form $T_p \sim (\ln r)^2$) und passen Sie die allgemeine Lösung an die Randbedingungen an.

f) Wie groß ist der an die Rohrwand abgeführte Wärmestrom?

g) Welche Temperatur hat der Zylinder?

Geg.: U, η, λ, R_i, R_a, T_0